

B 日程

解答上の注意

1. 解答は、すべて解答用紙に記入しなさい。
2. 問題 2 のように「下の選択肢から 1 つ選び、番号で答えなさい。」の指示がある場合は
それに従い、他の設問では次の 3. に従って空欄 に適する数を答えなさい（**1 桁の整数とは限らない**）。
3. ①分数形で解答するときは、それ以上約分できない形で答えなさい。
②根号を含む形で解答するときは、根号の中の自然数が最小となる形で答えなさい。
③比を解答するときは、最も簡単な自然数の比で答えなさい。

問題 1

- (1) 放物線 $C_1: y = 2x^2 - 4x - 6$ が x 軸から切り取る線分の長さを求めよ。
- (2) 放物線 $C_2: y = -kx^2 + 3x - \frac{1}{2}k$ ($k > 0$) が x 軸から切り取る線分の長さが 2 となるような k の値を求めよ。

という問題の解き方について、A 君と S さんが話し合っている。

A 君: (1)から解いてみよう。 C_1 と x 軸の交点の x 座標を求めれば、 C_1 が x 軸から切り取る線分の長さが計算できるね。

S さん: 2 次方程式 $2x^2 - 4x - 6 = \boxed{\text{ア}}$ の解は $x = -\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ だから、 C_1 が x 軸から切り取る線分の長さは $\boxed{\text{エ}}$ なのね。

A 君: この考え方は、(2)にも利用できるね。

まず C_2 と x 軸の交点の x 座標を求めると、 $\frac{\boxed{\text{オ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{カ}} - \boxed{\text{キ}} k^2}}{\boxed{\text{ク}} k}$

となるから、 C_2 が x 軸から切り取る線分の長さを 2 とおいて k の値を求めると、

$k = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ となるわ。

問題 2

下の選択肢 1 ~ 4 から適するものを 1 つずつ選び、番号で答えなさい。

(1) $a+b$ と ab がともに整数であることは、 a と b がともに整数であるための ア。

(2) x と y がともに無理数であることは、 $x+y$ が無理数であるための イ。

(3) $m \geq 0$ かつ $n \leq 0$ であることは、 $mn \leq 0$ であるための ウ。

- 1 必要条件であるが、十分条件ではない
- 2 十分条件であるが、必要条件ではない
- 3 必要十分条件である
- 4 必要条件でも十分条件でもない

問題3

[1] 関数 $y = |x^2 - 6x + 5|$ のグラフと直線 $y = x + k$ (k は定数) の共有点の個数を考える。

(1) $k = -$ のとき、共有点は1個である。

(2) $k = -$, $\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ のとき、共有点は3個である。

(3) $k = -$ のとき、3個の共有点を x 座標が小さい方から A, B, C とすると、

$AB : BC =$: である。

[2] $\triangle ABC$ の面積が $18\sqrt{3}$ で、 $\frac{\sin A}{7} = \frac{\sin B}{8} = \frac{\sin C}{3}$ が成り立つとき、

(1) $\cos A = \frac{\text{キ}}{\text{ク}}$, $\sin A = \sqrt{\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}}$ である。

(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径をそれぞれ R , r とすると、

$R =$, $r =$ である。

[3] 12本の異なる鉛筆がある。

(1) これらを8本, 3本, 1本の3組に分ける方法は通りある。

(2) これらを8本, 2本, 2本の3組に分ける方法は通りある。

(3) これらを4本ずつA君, B君, C君に与える方法は通りある。

問題 4

[1] $x \geq 0$ のときつねに $x^3 - 9x^2 + 15x + k \geq 0$ となるように、定数 k の値の範囲を定めたい。

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + k$ とおくと、 $f'(x) = \boxed{\text{ア}}x^{\boxed{\text{イ}}} - \boxed{\text{ウ}}x + \boxed{\text{エ}}$ であり、

$f(x)$ の極大値は $k + \boxed{\text{オ}}$ ($x = \boxed{\text{カ}}$ のとき)、極小値は $k - \boxed{\text{キ}}$ ($x = \boxed{\text{ク}}$ のとき)

である。

$x \geq 0$ において $f(x)$ が最小値をとるのは、 $x = \boxed{\text{ケ}}$ のときであるから、

題意を満たす k の値の範囲は $k \geq \boxed{\text{コ}}$ である。

[2] 2つの放物線 $C_1: y = x^2 - 4x + 8$, $C_2: y = x^2$ がある。このとき、 C_1 にも C_2 にも接する直線と C_1 , C_2 によって囲まれる部分の面積 S を求めたい。

放物線 C_1 , C_2 の交点の x 座標は、 $\boxed{\text{サ}}$ である。

C_1 上にあつて x 座標が t である点を P とすると、点 P における C_1 の接線の方程式は、

$y = \boxed{\text{シ}}(t - \boxed{\text{ス}})x - t^2 + \boxed{\text{セ}}$ である。

この直線が C_2 にも接するとき、この直線の方程式は

$y = \boxed{\text{ソ}}x - \boxed{\text{タ}}$ であり、 $S = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

問題 5

[1] $f(\theta) = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) のとき,

$$f(\theta) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}} \sin \theta + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \cos \theta \text{ と変形できる。さらに合成公式を用いて}$$

$$f(\theta) = \sqrt{\boxed{\text{オ}}} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}\right) \text{ が得られるから, } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ における } f(\theta) \text{ の}$$

最大値は $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。

[2] 2つの円 $x^2 + y^2 - 6kx - 8ky + 10k - 1 = 0$ …①, $x^2 + y^2 = 4$ …②

(ただし, k は正の定数で, $k \neq \frac{1}{5}$) がある。

(1) k の値にかかわらず円①が必ず通る点は, $\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}, \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)$ である。

(2) 2つの円①, ②が接するとき, $k = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。